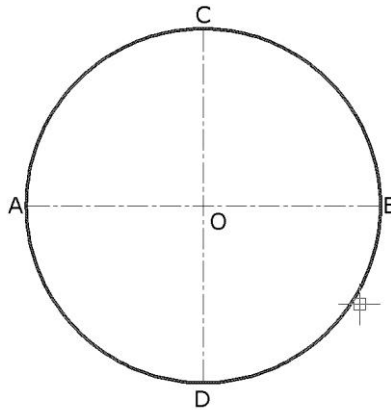


PROYECTO ALDA EDUCA ESTRATEGIAS PARA EL DESARROLLO DE LAS CAPACIDADES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICA PARA EL 2º CICLO.

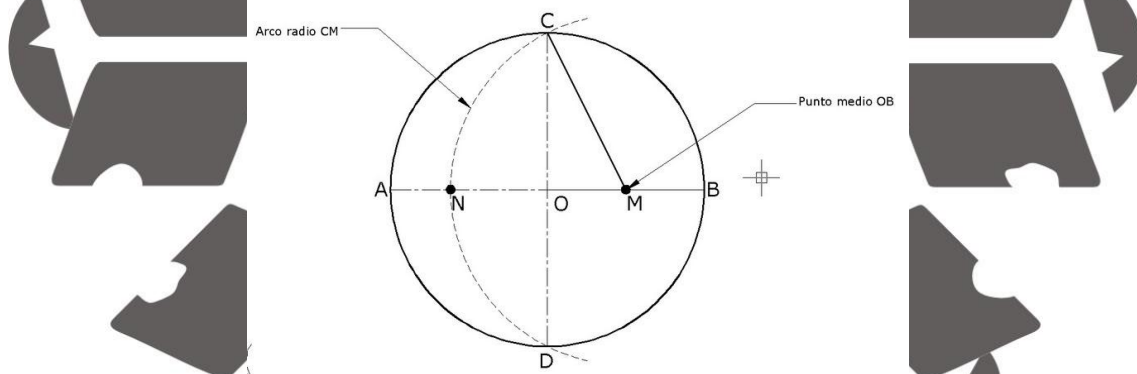
Geometría Cómo trazar un pentágono con compás

Realizar un círculo con el compás

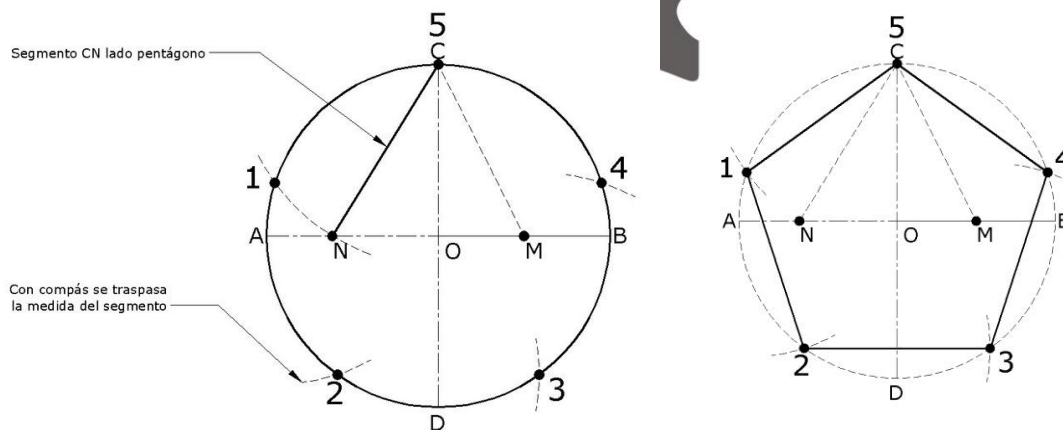
Dada una circunferencia con centro O, se trazan los ejes perpendiculares AB y CD (Diámetro)



Luego se marca el punto medio del radio de la Cía.

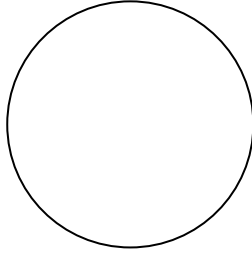


Luego se marca uno de los vértices del pentágono. Colocando en el punto C es compás y se abre el compás hasta el punto medio del radio pasando por uno de los puntos de la Cía. Y así sucesivamente hasta formar todos los vértices del pentágono, uniendo los puntos.

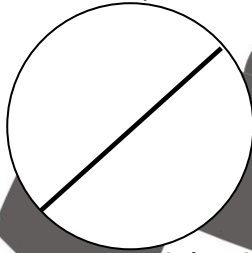


Cómo trazar un cuadrado a partir del uso del compás

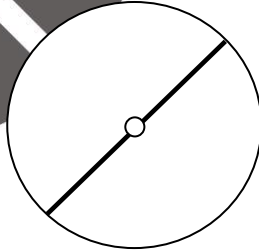
Trazar una Cía



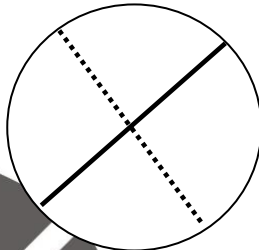
Se marca la diagonal del la Cía que será la diagonal del cuadrado.



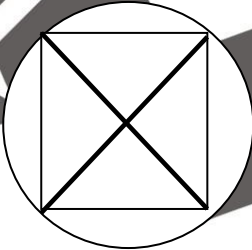
Con el transportador se marca el ángulo recto a partir del punto medio de la diagonal del cuadrado



Se traza la otra diagonal.

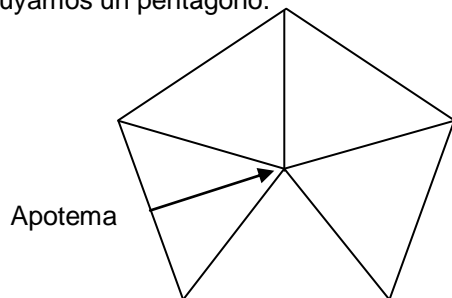


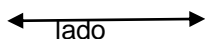
Se unen los vértices.



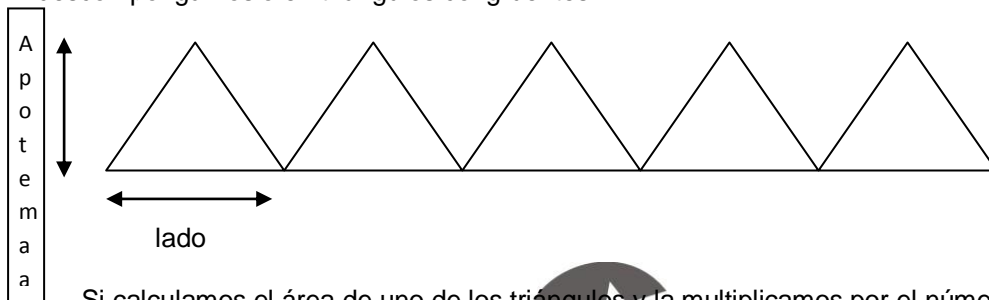
Área del polígono regular

Construyamos un pentágono.





Para calcular el área de este pentágono, como la de cualquier polígono regular, descompongámoslo en triángulos congruentes:



Si calculamos el área de uno de los triángulos y la multiplicamos por el número de lados del polígono, obtenemos el área de éste.

Si observas el pentágono, notarás que la base de cada triángulo representa a uno de los lados del polígono y la altura de cada triángulo es la apotema del polígono. Por lo tanto:

$$A = \frac{\text{Base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\text{lado} \times \text{apotema}}{2}$$

Como el polígono tiene 5 lados, para calcular el área, hacemos así:

$$A = 5 \frac{\text{Lado} \times \text{apotema}}{2} = \frac{5 \times \text{lado} \times \text{apotema}}{2}$$

Como 5 lados tiene el pentágono, entonces el perímetro = 5 x L

$$\text{La fórmula para calcular área es: } \frac{5 \times L \times \text{apot}}{2} = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

Obs: No es necesario que el alumno sepa de memoria la fórmula del área de un pentágono regular si sabe la fórmula del triángulo regular ya va poder resolver, puede resolver con esta fórmula:

$$A = 5 \frac{\text{lado} \times \text{altura}}{2}$$

Obs: de la misma manera se puede desarrollar la fórmula del hexágono.

Números Multiplicar con las manos

Desde la lejana Edad Media nos llega este truco para recordar la tabla del nueve, sólo mirando las manos. Tal parece que el problema de estudiar de memoria las tablas es un asunto de muy vieja data. Coloca tus manos hacia delante y asigna a cada dedo un número del 1 al 10, siguiendo el orden de izquierda a derecha.

Para obtener un producto, por ejemplo 4 x 9, doblamos por sus nudillos el dedo número 4.

El 36 ha quedado a la vista. Hacia la mano izquierda quedan 4 dedos sin doblar y a la izquierda quedan 5 dedos sin doblar.

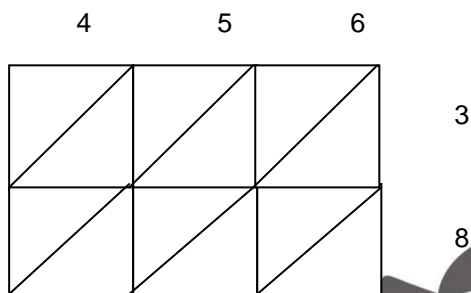
Veamos otros productos:

6 x 9 = 54 Bajamos el dedo nº 6 y quedan hacia la izquierda los 5 dedos alzados y hacia la derecha los 4 dedos quedan alzados.

Multiplicación de hindúes

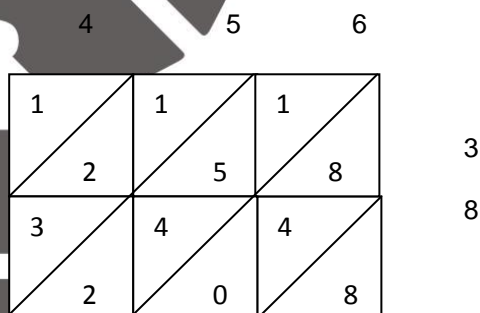
Allá por el siglo V, en la India, para multiplicar dos números, empleaban una tabla de tantas columnas como cifras tuviera uno de ellos y tantas filas como cifras tuviera el otro. Arriba de cada columna escribían la cifra correspondiente del primer número y a la derecha de cada fila,

en forma ordenada de arriba hacia abajo, cada una de las cifras del segundo número. Luego, dividían cada casillero con una diagonal. Por ejemplo, así preparaban la multiplicación $456 \times 38 = 17.328$

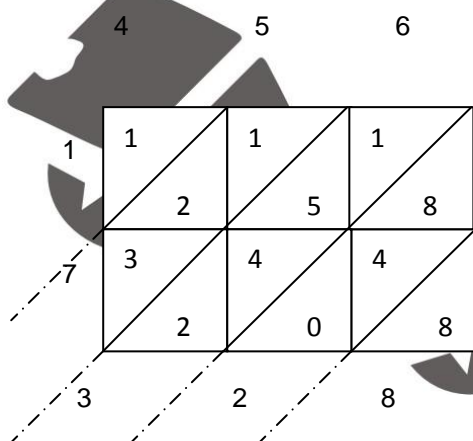


Se multiplica la unidad con la decena $6 \times 3 = 18$ y se coloca en el 1 cuadrado de la derecha, arriba la decena y debajo de la diagonal la unidad.

Se multiplica la decena con la unidad $5 \times 8 = 40$ y se coloca en el cuadro del medio donde la decena va arriba de la diagonal y la unidad va debajo de la diagonal. Y así sucesivamente



Para hallar el resultado, sumaban las cifras de cada diagonal. El proceso se realizaba comenzando por la derecha. Si el número obtenido excedía de nueve, llevaban la primera cifra a la diagonal siguiente y la sumaban mentalmente.



Un resultado a su gusto

Existe un procedimiento muy sencillo que, dado el número 12.345.679, permite obtener como resultado de una multiplicación un número en el que todas las cifras son iguales.

¿Queremos que todas las cifras sean 6?

Resolvemos:

12.345.679
 X 54

 49382716
 61728395

 666.666.666
 ¿Nos gustaría que todas fueran 2?
 12.345.679
 X 18

 98765432
 12345679

 222.222.222

Todos que sean 5?
 12.345.679
 X 45

 61728395
 49382716

 555.555.555

Habrás notado que el primer factor es siempre la serie de los números, del uno al nueve, saltando el ocho: 12345679.

Pues bien, el segundo factor se encuentra multiplicando por 9 la cifra elegida:

- Si quiero que el resultado esté formado únicamente por seis, multiplico por 54 ($9 \times 6 = 54$)
- Si quiero que sean sólo 2, multiplico por 18 ($9 \times 2 = 18$)
- Si deseo sólo cincos, multiplicaré por 45 ($9 \times 5 = 45$)

¿Cómo harías para que el resultado esté formado sólo por nueves?

¿Y para obtener sólo ochos?

Para asombrar al más incrédulo:

Éste es un truco para hacer con lápiz y papel o con ayuda de una pizarra.

Resultará realmente asombroso, pero debes asegurarte de dominar muy bien la técnica antes de arriesgarte a emplearlo en público.

Dirás que vas a realizar una suma con números elegidos por la concurrencia, y que ésta dará por resultado, exactamente, el número de cinco cifras que ellos elijan ahora.

Supongamos que te piden el 48.452. A partir de 3ste momento, veremos, paso a paso, el procedimiento a seguir.

Anota el número pedido como resultado en un costado del papel o pizarra y recuádralo. A parte, inicia la suma con el número que se obtiene eliminando la primera cifra del número elegido y sumándola a la última cifra del mismo:

$$8.452 + 4 = 8.456$$

Pide al público un número de cuatro cifras a azar. Anótalo debajo del anterior. Por ejemplo, si sugieren 7.709, anotarás:

8.456

7.709

¡Ahora es mi turno! Dirás. Y escribirás un número de cuatro cifras cualquiera. En realidad, sin que nadie lo advierta, estarás escribiendo debajo de cada cifra una que sume nueve con ella:

8.456

7.709

2290

Es el turno del público: pídeles otro número de cuatro cifras. Supongamos que te dicen 4.562; anótalo:

8.456

7.709

2.290

4562

Repite la estrategia anterior: las cifras que suman nueve.

8.456
7.709
2.290
4.562
5.437

Debes continuar este proceso hasta que hayas escrito tantos números integrados por cifras que suman nueve con las del número anterior como te indique la primera cifra del número que el público espera como resultado.

En nuestro ejemplo habrá que hacerlo 4 veces, pues el número elegido era el 48.452.

Completaremos entonces el juego, suponiendo nuevas intervenciones del público y tus sucesivas anotaciones.

Pide la colaboración para realizar la suma y actúa un poco para darle emoción al resultado final.

8.456
7.709
2.290
4.562
5.437
3.805
6.194
+ 1.746
8.253
48.452

Observación: HACE MÁS DE 800 AÑOS QUE SE INVENTÓ ESTE JUEGO.

Con dados y fichas

Éste es un juego para dos o más jugadores.

Materiales: Para jugar sólo se necesitan papel, lápiz, un dado y 60 fichas.

(Las fichas pueden cambiarse por botones, o cualquier otro tipo de elemento que nos ayude a contar.)

¿Cómo se juega?

Por turno, cada jugador arroja el dado dos veces. Si obtiene números iguales, debe ceder el turno al próximo jugador. Si obtiene dos números diferentes, debe escribir la fracción que tiene por numerador al menor de ellos y por denominador, al mayor.

El jugador tomará la cantidad de fichas que indique la fracción obtenida y anotará ese puntaje para sí.

Así, por ejemplo, si el jugador lanza el dado y obtiene un dos en el primer lanzamiento, y un cinco en el segundo, habrá logrado un puntaje equivalente a dos quintos de sesenta:

$$\frac{2}{5} \text{ de } 60 = 24.$$

En una tabla, se irán acumulando los puntajes obtenidos por cada jugador ronda tras ronda, siempre a partir de 60 fichas.

Ganará aquél que llegue primero a los cien puntos (o al total establecido por el grupo antes de iniciar el juego). Si dos o más jugadores superarán los cien puntos (o el total establecido) en la misma ronda, ganará quien tenga el puntaje más alto.

Una carrera por partes

Elementos necesarios: un dado, una ficha o botón distinguible por participante y el tablero de la página siguiente:

¿Cómo se juega?

Los participantes colocan su ficha en el sector de Salida.

Cada participante, por turno, arroja el dado cuatro veces.

Con los números obtenidos se procede del siguiente modo:

El primer número será el numerador de una fracción, y el segundo número, su denominador;

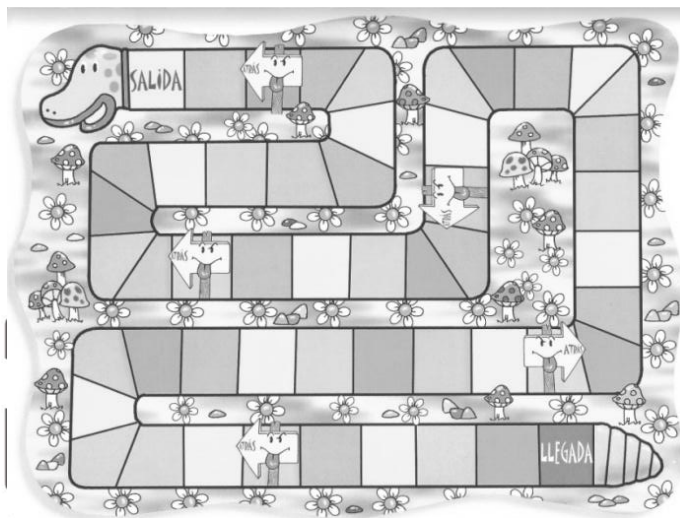
El tercer número se multiplicará por el cuarto:

Se calculará la fracción indicada del producto obtenido:

Es necesario que el resultado de esta última operación sea un número natural exacto, pues indica la cantidad de casillas que se debe avanzar. Si no es así, el jugador pierde ese turno. Veamos dos ejemplos:

Jugador A

Primer lanzamiento: 3
 Segundo lanzamiento: 5
 Fracción: $\frac{3}{5}$
 Tercer lanzamiento: 4
 Cuarto lanzamiento: 5
 Producto: 20
 $\frac{3}{5}$ de 20 = 12
 El jugador A avanza 12 casilleros.



Jugador B

Primer lanzamiento: 4
 Segundo lanzamiento: 5
 Fracción: $\frac{4}{5}$
 Tercer lanzamiento: 3
 Cuarto lanzamiento: 6
 Producto: 18
 $\frac{4}{5}$ de 18 = no es exacto por lo tanto el jugador pierde su turno.

Si la ficha de un jugador cae en un casillero burlón, debe arrojar nuevamente los dados, pero en lugar de avanzar... Retrocederá. Ganará el jugador que pase primero por la línea de Llegada.

Cinco líneas

Pueden participar de dos a cuatro jugadores.

Materiales: Se necesitan diez fichas del mismo color por cada jugador, el tablero de la página 73 de Jugando con las Matemáticas y un tetraedro como el que te indicamos en la página 72

¿Cómo se juega?

Cada jugador recibe 10 fichas de un mismo color.

Por turno, cada participante arrojará el tetraedro.

Al caer, éste quedará apoyado sobre una de sus caras.

El jugador podrá colocar una de sus fichas del jugador estén ubicadas sobre una línea recta, sin importar si su posición es horizontal, vertical y oblicua.

Tampoco importará que entre las fichas alineadas del jugador pueda haber otras que no le pertenezcan o casillas vacías.

Si un jugador cree conveniente apoderarse de la casilla ocupada por otro, podrá hacerlo cuando sea su turno y obtenga una consigna que se lo permita. En tal caso, retirará la ficha del oponente y se la devolverá.

De igual modo, si un jugador ha colocado sus diez fichas, cuando le corresponda el turno de juego, para colocarla en una nueva ubicación.

La ficha tendrá que ser retirada del tablero antes de arrojar el tetraedro.

Variante: alinear solo cuatro fichas

Determinar el tiempo máximo que puede durar la jugada de cada participante.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42	43	44
45	46	47	48	49	50	51	52	53
54	55	56	57	58	59	60	61	62
63	64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98
99	100	101	102	103	104	105	106	107

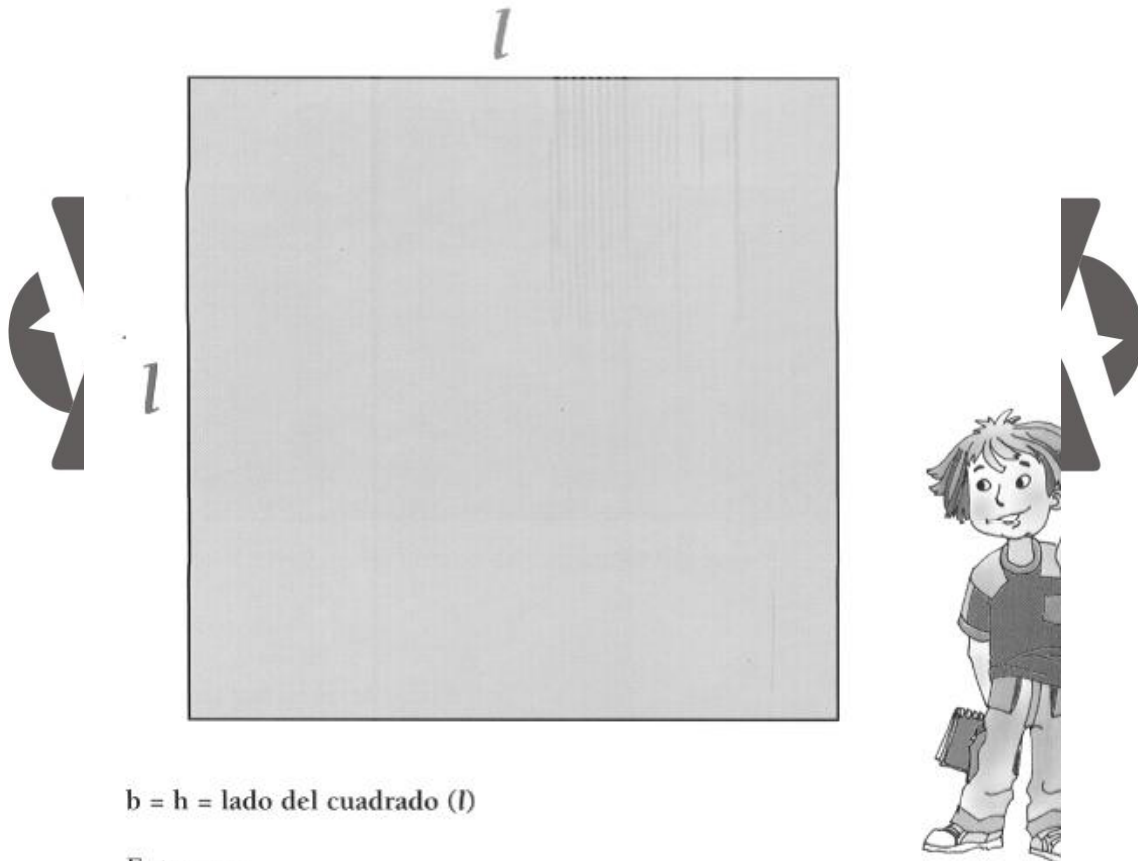
Más sobre el cálculo de áreas

Área del cuadrado

El cuadrado es un rectángulo especial porque todos sus lados son congruentes; entonces:

$$\text{área del cuadrado} = b \cdot h$$

Pero como dijimos que en el cuadrado los lados eran congruentes, resulta:



$$b = h = \text{lado del cuadrado } (l)$$

Entonces:



El área del cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado. En símbolos: área del cuadrado = $l \cdot l = l^2$

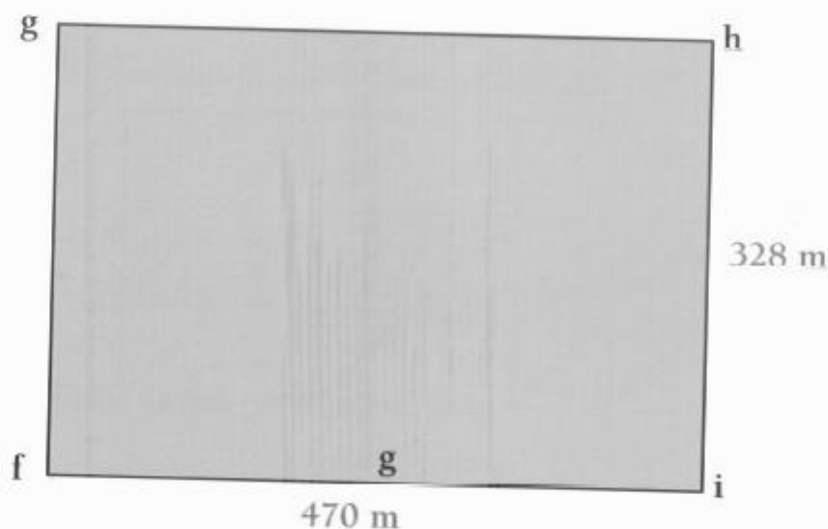
Aplicación de las fórmulas

Resolvamos situaciones aplicando las fórmulas que aprendimos:

- Calculemos el área de un terreno rectangular que tiene 328 m de frente y 470 m de fondo.

La fórmula que nos permite hallar el área del rectángulo es $b \cdot h$.

Si consideramos que 328 m de frente equivale a la base del rectángulo y 470 m de fondo a la altura, resulta:



$$\text{área de } \overline{fghi} = b \cdot h$$

$$\text{área de } \overline{fghi} = 328 \text{ m} \cdot 470 \text{ m} =$$

$$\text{área de } \overline{fghi} = 154.160 \text{ m}^2$$

El área del terreno es de 154.160 m².

- Hallar el valor del lado de un cuadrado de madera cuya área es de 65.536 cm².

La fórmula que debemos emplear es: $\text{área del cuadrado} = l^2$

Entonces:

$$65.536 \text{ cm}^2 = l^2$$

$$\sqrt{65.536 \text{ cm}^2} = l$$

$$256 \text{ cm} = l$$

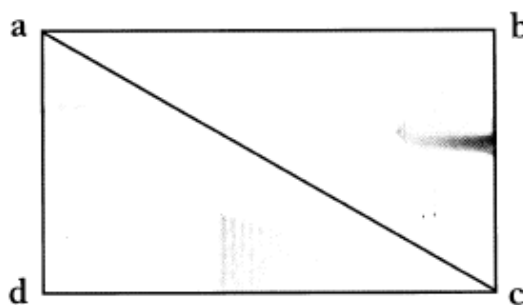
Cada lado del cuadrado mide 256 cm.

Más áreas por descubrir

Trabajaremos ahora con las fórmulas de las áreas del triángulo y del trapecio. También para estos casos, aplicaremos una vez más los criterios de congruencia de triángulos.

Área del triángulo

Dividamos este rectángulo en dos triángulos congruentes a partir del trazado de una de las diagonales. Lo hacemos así:



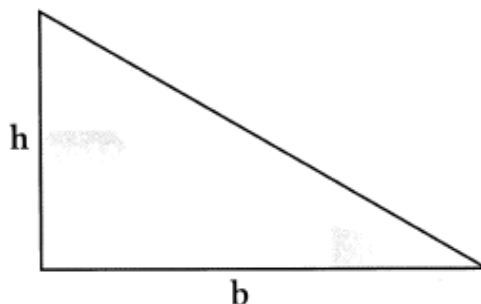
Como los triángulos son congruentes, sus áreas también lo son. Entonces:

$$\text{área } \triangle adc + \text{área } \triangle abc = \text{área } \text{rectángulo } abcd$$

Como ambos triángulos son congruentes, entonces:

$$\text{área } \triangle abc + \text{área } \triangle abc = b \cdot h$$

$$2 \text{ área } \triangle abc = b \cdot h$$



Entonces:



El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la longitud de su base por la longitud de su altura. En símbolos: $\text{área } abc = \frac{b \cdot h}{2}$

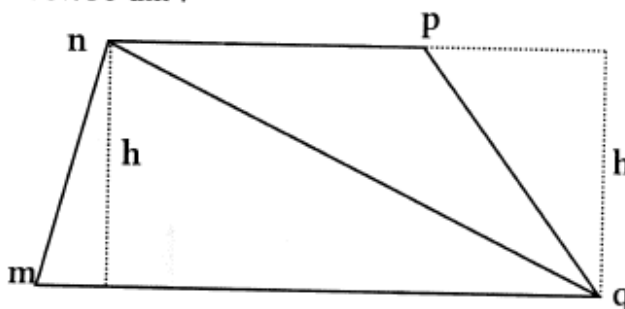
- Ahora aplicamos la fórmula:

$$\begin{aligned} \text{área del terreno triangular} &= \frac{b \cdot h}{2} \\ \text{área del terreno triangular} &= \frac{2050 \text{ dm} \cdot 150 \text{ dm}}{2} = \\ \text{área del terreno triangular} &= \frac{307.500 \text{ dm}^2}{2} \\ \text{área del terreno triangular} &= 153.750 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

El área del terreno triangular es de 153.750 dm².

Área del trapecio

Construyamos un trapecio $mnpq$ y tracemos una de sus diagonales. Lo hacemos así:



A partir de la diagonal, nos quedaron determinados dos triángulos: mnp y npq . Entonces:

$$\begin{aligned} \text{área } \widehat{mnpq} &= \text{área } \widehat{mnp} + \text{área } \widehat{npq} \\ \text{área } \widehat{mnpq} &= \frac{\overline{mq} \cdot h}{2} + \frac{\overline{np} \cdot h}{2} \end{aligned}$$

Si consideramos:

$$\begin{aligned} \overline{mq} &= B \text{ (base mayor)} \\ \overline{np} &= b \text{ (base menor)} \\ h &\text{ es la misma para ambos triángulos} \end{aligned}$$

Resulta:

$$\text{área } \widehat{mnpq} = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

Entonces:

$$\text{área } \widehat{mnpq} = \frac{Bh + bh}{2}$$



El área del trapecio es igual a la mitad del producto entre la suma de las longitudes de las bases por la longitud de la altura.

En símbolos: área del trapecio = $\frac{(B + b) \cdot h}{2}$



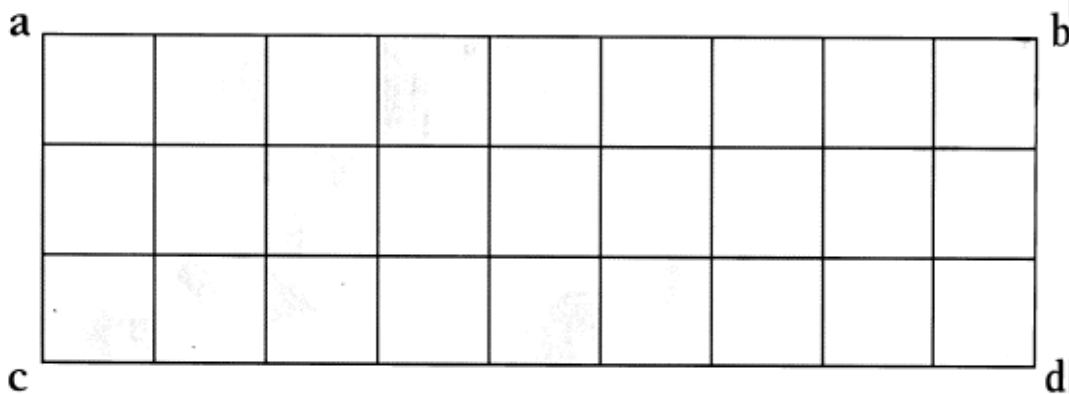
Calculo del área de los polígonos

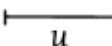
En muchas oportunidades, cuando queremos cubrir con cerámica una pared o forrar un cartón con papel, necesitamos calcular cuánto mide la superficie que vamos a considerar. Para ello, tenemos que conocer algunas sencillas fórmulas que nos permitan determinar el área de los polígonos.

Área del rectángulo

Para calcular la superficie del rectángulo $abcd$ lo primero que determinamos es la unidad de longitud y la unidad de medida que vamos a emplear.

Observa:

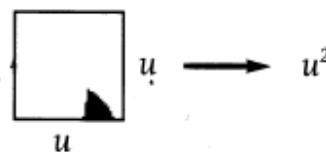


- Consideremos como unidad de longitud a este segmento 

Entonces:

- la longitud de \overline{ab} es igual a 9 u.
- la longitud de \overline{ac} equivale a 3 u.

- Consideremos ahora como unidad de medida este cuadradito:



Entonces:

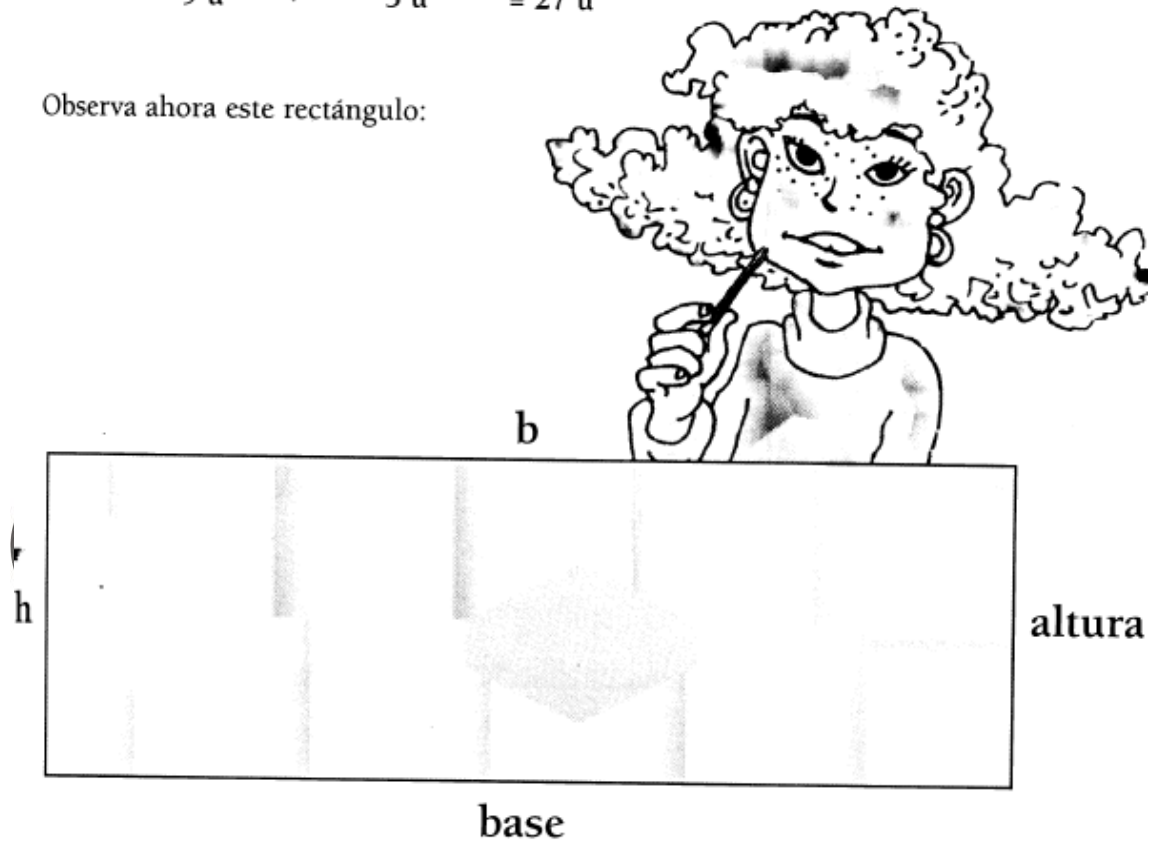
- si contamos la cantidad total de cuadraditos que determinan el área de abcd, son $27 u^2$.

¿Cómo podemos abreviar este cálculo?

$$\text{longitud de } \overline{ab} \cdot \text{longitud de } \overline{ac} = \text{área } \overline{abcd}$$

$$9 u \cdot 3 u = 27 u^2$$

Observa ahora este rectángulo:



Si consideramos:

\overline{ab} = base del rectángulo (la indicamos con la letra b)

\overline{ac} = altura del rectángulo (la designamos con la letra h)

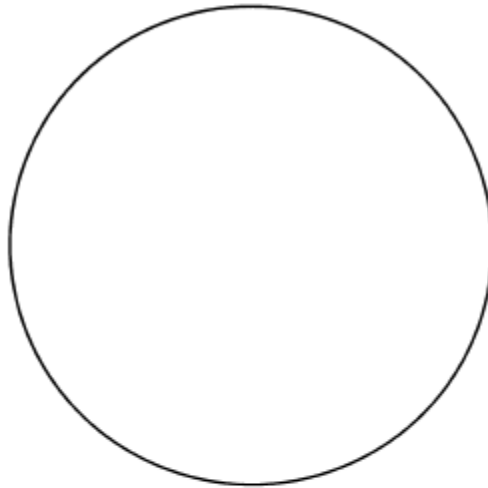
Resulta:

 **El área del rectángulo es igual al producto de la longitud de su base por la longitud de su altura. En símbolos: $\overline{abcd} = b \cdot h$**

Construcción de polígonos regulares

¿Qué pasos debemos seguir para construir un polígono regular de 8 lados? Obser

- Primero, trazamos una circunferencia.

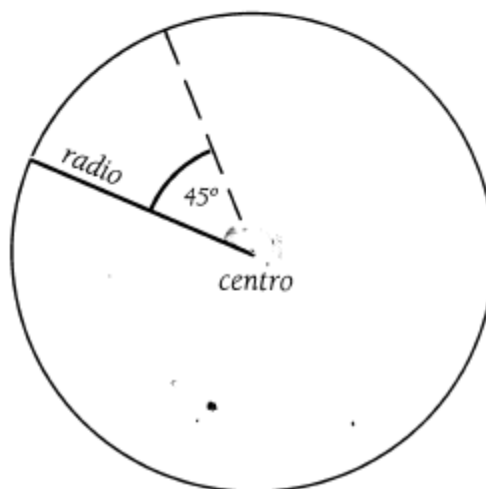


- Luego dividimos el ángulo central de la circunferencia (360°) por el número de lados del polígono que queremos construir, en este caso 8.

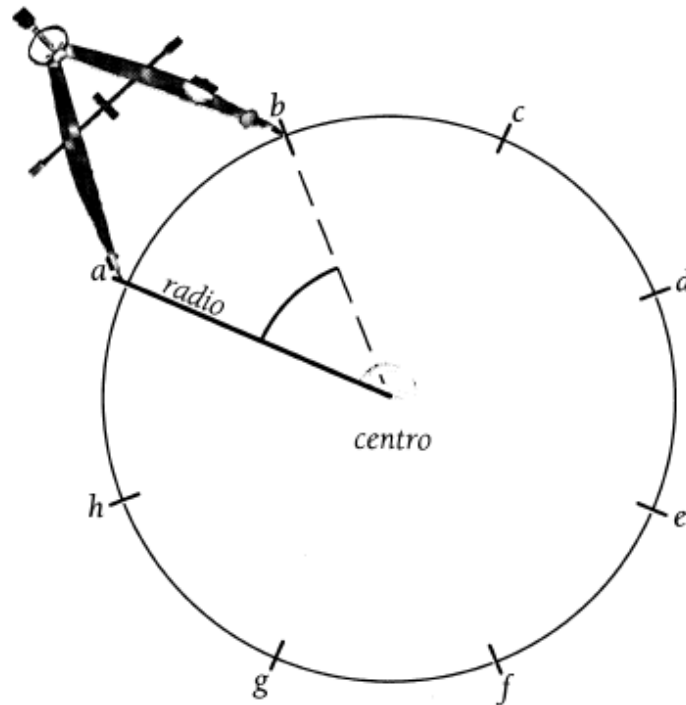
$$360^\circ : 8 = 45^\circ$$

Ten en cuenta que el ángulo central de un polígono tiene el vértice en el centro de polígono y de la circunferencia en la que está inscrito. Los lados del ángulo equivalen a dos radios consecutivos de la circunferencia.

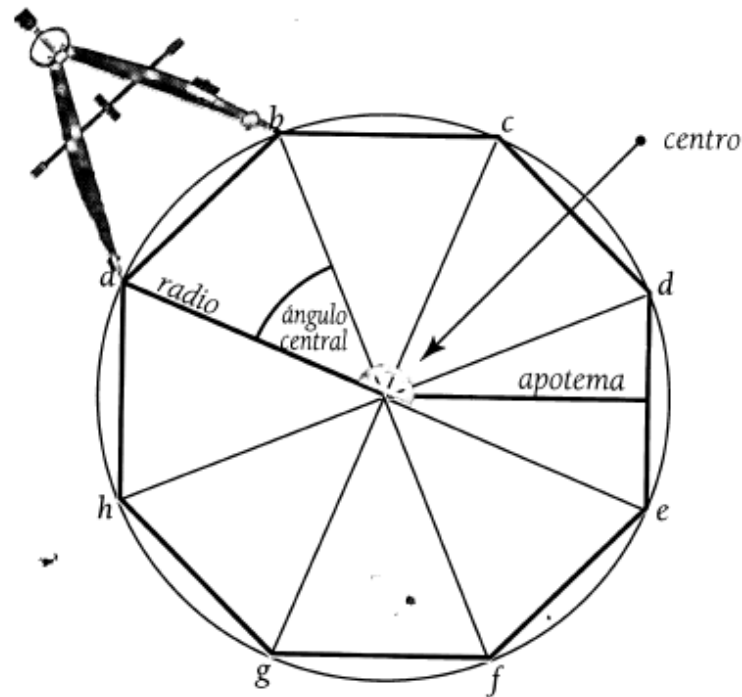
- Ahora tomamos el radio de la circunferencia como uno de los lados del ángulo y con el transportador marcamos 45° sobre la circunferencia.



● A continuación, con el compás tomamos la abertura del ángulo (arco de la circunferencia) y la transportamos a lo largo de la circunferencia, determinando arcos que la cortan.



● Finalmente, unimos los puntos que quedaron determinados: son los vértices del polígono de ocho lados abcdefgh.



Técnicas de cálculo

La manera de realizar los cálculos tiene su propia historia, directamente relacionada con la forma de representar los números, es decir, con los sistemas de numeración. Todos los pueblos de la antigüedad con conocimientos matemáticos empleaban técnicas de cálculo, y vamos a conocerlas para comprender mejor las distintas maneras de multiplicar. Con una aclaración: para simplificar, se usará la representación correspondiente a nuestro sistema de numeración.

Multiplicación egipcia

Unos 1.600 años antes de la era cristiana, los egipcios usaban un método basado en la adición para resolver multiplicaciones. Si deseaban calcular el producto de 57×307 , preparaban dos columnas de números, correspondientes a cada uno de los factores multiplicado por 2, 4, 8, y así sucesivamente, duplicando esta cifra cada vez.

Este sistema era conocido como “método egipcio por duplicación”, y se encuentra desarrollado en un papiro que, como muchos documentos de la antigüedad, recibió más tarde un nombre por parte de los científicos que los estudian. Se llama “Papiro Rhind”, y constituye uno de los más extensos de la antigüedad que contiene nociones matemáticas. Mide casi seis metros de largo por 30 cm de alto y fue hallado en 1858. En la actualidad se encuentra en el Museo Británico de Londres.

* 1	—	307	*
2		614	
4		1.228	
* 8	—	2.456	*
* 16	—	4.912	*
* 32	—	9.824	*
64		19.648	



Como $1 + 8 + 16 + 32 = 57$, entonces:

$$307 + 2.456 + 4.912 + 9.824 = 17.499 = 57 \times 307$$

Romanos

Allá por el año 500 antes de Cristo, los romanos utilizaban otro método para resolver las cuentas de multiplicar.

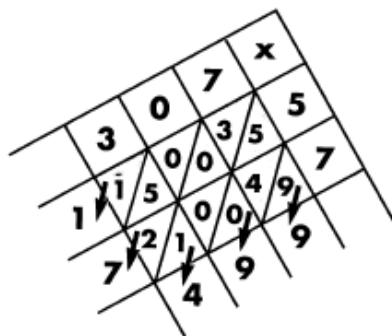
El mismo cálculo, 57×307 , era resuelto de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r}
 307 \\
 57 \\
 \hline
 15000 \rightarrow \text{(equivale a } 300 \times 50) \\
 350 \rightarrow \text{(equivale a } 50 \times 7) \\
 2100 \rightarrow \text{(equivale a } 300 \times 7) \\
 49 \rightarrow \text{(equivale a } 7 \times 7) \\
 \hline
 17499
 \end{array}$$



Los árabes

En este breve recorrido no se puede dejar de mencionar a los árabes, que fueron quienes llevaron a Europa nuestro actual sistema de numeración. Su modo de multiplicar parece complicado, pero no lo es. Estuvo de moda en el siglo XV y era conocido con el nombre de *Método de las celosías*.



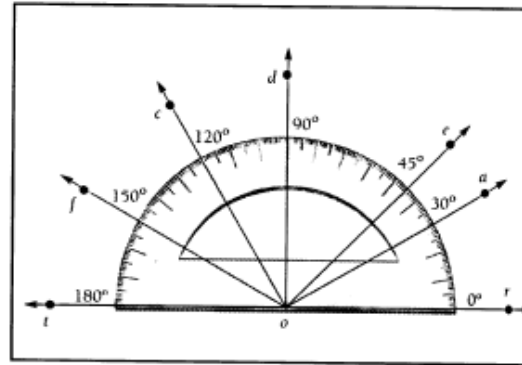
Una vez ubicados los factores, 307 y 57, se multiplican los dígitos como en un cuadro; estos productos se ubican separando la cifra de las decenas y la de las unidades. Por último, se suman siguiendo las flechas.

Trazado de ángulos

Para trazar o medir ángulos nos valemos de tres instrumentos: regla, transportador y compás. Ellos nos permiten lograr precisión en la construcción. Les proponemos aprender a trabajar con dos de estas herramientas.

¿Para qué sirve el transportador?

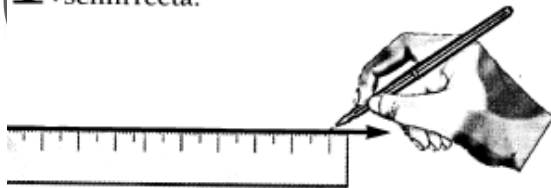
El transportador es un instrumento para medir y construir ángulos. Puede tener forma semicircular o circular. Su contorno está dividido respectivamente en 180 o 360 partes iguales, cada una de las cuales corresponde a un grado sexagesimal. El transportador sirve para trazar ángulos de una medida determinada.



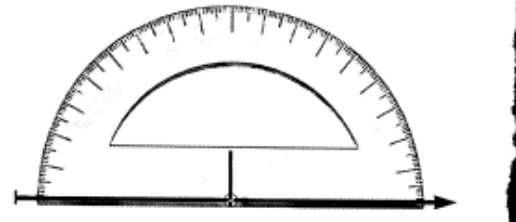
Cómo construir ángulos en cuatro pasos

Para trazar un ángulo empleando el transportador hacemos así:

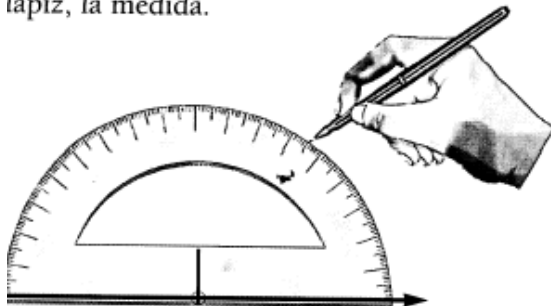
- 1 Tomamos la regla y trazamos una semirrecta.



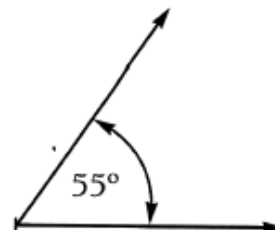
- 2 Luego, colocamos el transportador de forma tal que su centro coincida con el que será el vértice del ángulo, y el eje, con la semirrecta que trazamos antes.



- 3 A continuación determinamos, en el transportador, el valor que tendrá el ángulo y marcamos en la hoja, con un lápiz, la medida.



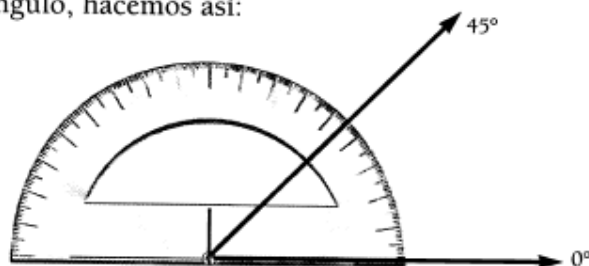
- 4 Finalmente, retiramos el transportador y unimos el vértice del ángulo con la marca que hicimos.



Cómo medir un ángulo

Cuando medimos un ángulo determinamos su *amplitud*. Para establecer la amplitud empleamos el transportador. La unidad de medida es el grado sexagesimal.

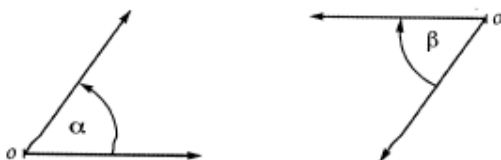
Para medir un ángulo, hacemos así:



- Colocamos el transportador de manera que su centro coincida con el vértice del ángulo y uno de los lados del ángulo pase por 0° .
- Luego, observamos en el transportador el número por el que pasa el otro lado del ángulo. Este número es la medida del ángulo. En este caso, 45° .

Sentidos de giro

Observa estos ángulos:



La amplitud de ambos es de 60° . Pero ¿qué ocurre?

Sus sentidos de giro son distintos.

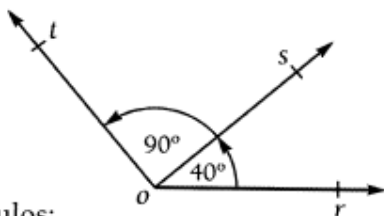
Entonces:

$\hat{\alpha}$ giró en sentido contrario al de las agujas del reloj: el ángulo α tiene sentido positivo

$\hat{\beta}$ giró en el sentido de las agujas del reloj: el ángulo β tiene sentido negativo

Ángulos consecutivos

Mariela construyó un ángulo de 40° en sentido positivo, luego giró el transportador y determinó otro ángulo de 90° . ¿Qué figura quedó determinada?



Analicemos estos ángulos:

- ambos presentan un vértice común (o)
- ambos presentan un lado, \vec{os} , común

Entonces: $\hat{tôs}$ y $\hat{sôr}$ son *ángulos consecutivos*.



Dos ángulos son consecutivos cuando presentan un lado en común.